DS 4

Option informatique, deuxième année

Julien Reichert

Exercice 1 : Logique et calcul des propositions

Nous nous intéressons dans cet exercice à l'étude de quelques propriétés de la logique propositionnelle tri-valuée. En plus des deux valeurs classiques VRAI ($\top$) et FAUX ($\bot$) que peut prendre une expression, la logique propositionnelle tri-valuée introduit une troisième valeur INDETERMINE (?). $\mathcal{V}$ est l'ensemble des variables propositionnelles et $\mathcal{F}$ l'ensemble des formules construites sur $\mathcal{V}$. Pour $A, B \in \mathcal{V}$, les tables de vérité des opérateurs classiques dans cette logique propositionnelle sont les suivantes :

(a) $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	?	$\bot$
?	$\top$	?
?	$\bot$	$\bot$
?	?	?

(b) $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	?	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	?	?
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	?

(c) $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	$\top$

(d) $\neg A$

A	$\neg A$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$
?	?

On appelle tri-valuation une fonction $f : \mathcal{V} \to \{\top, \bot, ?\}$, qu'on étend à une fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathcal{F}$. Elle satisfait une formule ϕ si $\hat{f}(\phi) = \top$. Une formule ϕ est une conséquence d'un ensemble de formules X si toute interprétation qui satisfait toutes les formules de X satisfait ϕ, et une tautologie si toute interprétation la satisfait. On pose $\top = 1$, $\bot = 0$ et $? = 0,5$.

Question 1.1 : Montrer que $A \vee \neg A$ n'est pas une tautologie.

Question 1.2 : Proposer une tautologie simple.

Question 1.3 : Proposer un calcul simple permettant de trouver la table de vérité de $A \wedge B$ en fonction de A et B. Même question pour $A \vee B$.

Question 1.4 : En logique bi-valuée classique, les propositions $\neg A \vee B$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes. Qu'en est-il dans le cadre de la logique propositionelle tri-valuée ?

Question 1.5 : En écrivant les tables de vérité, indiquer si les propositions $\neg B \Rightarrow \neg A$ et $A \Rightarrow B$ sont équivalentes.

Question 1.6 : Donner la table de vérité de la proposition $((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Cette proposition est-elle une tautologie ?

Un nouvel opérateur d'implication, noté $\rightarrow$, est alors défini, dont la table de vérité est la suivante :

A	B	$A \rightarrow B$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\top$	?	?
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	?	$\top$
?	$\top$	$\top$
?	$\bot$	?
?	?	?

Question 1.7 : $A \rightarrow A$ est-elle une tautologie ?

Question 1.8 : A-t-on équivalence entre le fait que B soit une conséquence de $\{A\}$ et le fait que $A \rightarrow B$ soit une tautologie ?

On définit un type `FormuleLogique` représentant les formules de la manière suivante :

```
type FormuleLogique =
|Vrai (* Constante Vrai*)
|Faux (* Constante Faux*)
|Indétermine (* Constante Indeterminé*)
|Var of string (* Variable propositionnelle*)
|Non of FormuleLogique (* Négation d'une formule*)
|Et of FormuleLogique*FormuleLogique (* conjonction de deux formules*)
|Ou of FormuleLogique*FormuleLogique (* disjonction de deux formules*)
|Implique of FormuleLogique*FormuleLogique (* implication*)
```

Question 1.9 : Avec la représentation précédente, écrire en CaML la formule : $((A \Rightarrow B) \wedge ((\neg A) \Rightarrow B)) \Rightarrow B$[1].

1. Au passage, commenter la formule en bon mathématicien.

Partie 2 : Automates probabilistes

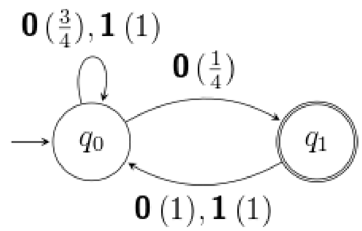
On fixe dans cet exercice un alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

Un *automate probabiliste* sur l'alphabet Σ est un quadruplet $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \mathrm{Pr})$, où :
- Q est un ensemble fini non vide d'*états* ;
- $q_0 \in Q$ est appelé *état initial* ;
- $F \subseteq Q$ est un ensemble dont les éléments sont appelés *états finals* ;
- Pr: $Q \times \Sigma \times Q \to [0; 1]$ est une application appelée *fonction probabiliste de transition*, pour laquelle on suppose que pour tout $q \in Q$, pour tout $a \in \Sigma$, on a $\sum_{q' \in Q} \mathrm{Pr}(q, a, q') = 1$. On note $\mathrm{Pr}(q \xrightarrow{a} q')$ pour $\mathrm{Pr}(q, a, q')$.

Une *transition* est un triplet $(q, a, q') \in Q \times \Sigma \times Q$, noté $(q \xrightarrow{a} q')$, tel que $\mathrm{Pr}(q \xrightarrow{a} q') > 0$.

On représente un automate probabiliste de manière graphique, de façon similaire à la représentation des automates non-déterministes classiques : les états sont représentés par des cercles, l'état initial par une flèche arrivant sur le cercle correspondant, les états finals par des cercles doubles (ou une flèche sortant des cercles correspondants). La fonction probabiliste de transition est représentée par une flèche entre états, dont l'étiquette est cette fois $a(p)$ pour a la lettre et p la probabilité si elle est non nulle.

Ainsi, l'automate $\mathcal{A}_0 = (\{q_0, q_1\}, q_0, \{q_1\}, \mathrm{Pr})$ représenté ci-dessous :



a pour fonction probabiliste de transition Pr la fonction suivante (seules les valeurs non nulles sont mentionnées) :

q	α	q'	$\mathrm{Pr}(q \xrightarrow{\alpha} q')$
q_0	**0**	q_0	3/4
q_0	**0**	q_1	1/4
q_0	**1**	q_0	1
q_1	**0**	q_0	1
q_1	**1**	q_0	1

Étant donné un automate probabiliste $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \mathrm{Pr})$ sur Σ, un *chemin* ρ est une suite finie de transitions $q_{i_1} \xrightarrow{a_1} q_{i_2} \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_n} q_{i_{n+1}}$; on dit que ρ a pour *étiquette* le mot $a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$, pour *état de départ* l'état $q_{i_1} \in Q$ et pour *état d'arrivée* l'état $q_{i_{n+1}} \in Q$. La *probabilité* de ρ, notée $\mathrm{Pr}(\rho)$, est définie comme $\Pi_{k=1}^{n} \mathrm{Pr}(q_{i_k} \xrightarrow{a_k} q_{i_{k+1}})$. Un état peut être vu comme un chemin de longueur nulle, la probabilité d'un chemin de longueur nulle est égale à 1. Un *chemin pour le mot* $u \in \Sigma^*$ est un chemin dont l'étiquette est u et l'état de départ est q_0. Ce chemin est *acceptant* si l'état d'arrivée est un état de F, *non-acceptant* sinon. La *probabilité d'un mot* $u \in \Sigma^*$, notée $\mathrm{Pr}(u)$, est par définition la somme des probabilités de tous les chemins acceptants pour le mot u.

Question 2.1 : Calculer les probabilités des mots ε (le mot vide), 0 et 010 pour l'automate $\mathcal{A}_0$.

Question 2.2 : Montrer, pour tout automate probabiliste $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \mathrm{Pr})$ et tout mot $u \in \Sigma^*$, l'égalité suivante en utilisant une récurrence sur la longueur du mot u : $\mathrm{Pr}(u) = 1 - \Sigma_{\rho \text{ chemin non acceptant sur } u} \mathrm{Pr}(\rho)$.

Question 2.3 : On revient à l'automate probabiliste $\mathcal{A}_0$. Quels sont les mots u dont la probabilité $\mathrm{Pr}(u)$ pour $\mathcal{A}_0$ est égale à 0 ? Quels sont ceux dont la probabilité est égale à 1 ?

Question 2.4 : Proposer (sans justification) une expression rationnelle pour le langage des mots u dont la probabilité $\mathrm{Pr}(u)$ pour $\mathcal{A}_0$ est non nulle.

Question 2.5 : Montrer que pour tout automate probabiliste $\mathcal{A}$, il existe un automate non nécessairement déterministe $\mathcal{A}'$ qui accepte exactement les mots dont la probabilité pour $\mathcal{A}$ est non nulle.

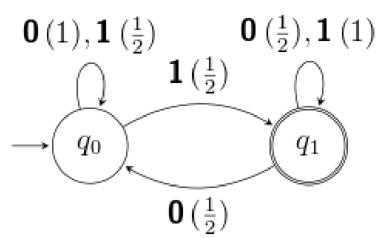
Question 2.6 : Appliquer la construction de la question précédente à l'automate $\mathcal{A}_0$ pour obtenir un automate non-déterministe qui accepte exactement les mots dont la probabilité pour $\mathcal{A}_,$ est non nulle. Déterminiser cet automate.

Soit $\mathcal{A} = (Q, q_0, F, \mathrm{Pr})$ un automate probabiliste sur Σ. Pour un réel $\eta \in [0;1[$, le η-langage reconnu par $\mathcal{A}$, noté $L_\eta(\mathcal{A})$, est défini par : $L_\eta(\mathcal{A}) = \{u \in \Sigma^* \mid \mathrm{Pr}(u) > \eta\}$. On dit qu'un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est *stochastique* s'il existe un automate probabiliste et un réel $\eta \in [0;1[$ tel que L soit le η-langage reconnu par l'automate.

Question 2.7 : Démontrer que tout langage rationnel est stochastique.

Étant donné un mot $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ sur l'alphabet $\{0,1\}$, on dit que l'expression $\overline{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}^2$ est une écriture (finie) en base deux du nombre réel $\Sigma_{i=1}^n 2^{-i}\alpha_i$.

On considère maintenant l'automate $\mathcal{A}_1 = (\{q_0, q_1\}, q_0, \{q_1\}, \mathrm{Pr})$ ci-dessous :



Question 2.8 : Dans l'automate $\mathcal{A}_1$, calculer $\mathrm{Pr}(q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1)$ et en donner une écriture finie en base deux.

Question 2.9 : Dans l'automate $\mathcal{A}_1$, calculer $\mathrm{Pr}(10)$ et en donner une écriture finie en base deux.

Question 2.10 : Dans l'automate $\mathcal{A}_1$, calculer $\mathrm{Pr}(1101)$ et en donner une écriture finie en base deux.

Question 2.11 : Soit $u \in \{0,1\}^*$ un mot arbitraire. Montrer que $\mathrm{Pr}(u)$ pour $\mathcal{A}_1$ admet une écriture finie en base deux, et en donner une expression. Prouver que cette écriture est correcte.

Question 2.12 : Soit $\eta \in [0;1[$. Prouver l'égalité suivante :

$$L_\eta(\mathcal{A}_1) = \{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \in \{0,1\}^* \mid \overline{0,\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1}^2 > \eta\}.$$

Question 2.13 : En déduire qu'il existe des langages stochastiques qui ne sont pas rationnels.

Partie 3 : La traditionnelle énigme

Une grille de Kenken est un carré latin de taille `n` (dans chaque ligne et chaque colonne les chiffres de `1` à `n` figurent une et une seule fois) dont toutes les cases figurent en plus dans une zone bien délimitée et associée à un opérateur et à un nombre. Si l'opérateur est un `+` (resp.), la somme (resp. le produit) des éléments de la zone est le nombre en question, si l'opérateur est un `-` (resp.), la différence (resp. le rapport) entre le plus grand et le plus petit élément de la zone, alors nécessairement de taille 2, est le nombre en question

Exercice : Résoudre les deux Kenken ci-dessous. Un exemple de grille résolue est donné auparavant. On ne demande plus de détailler les étapes du raisonnement si le temps presse.